



TITLE:

エアリード楽器の発音機構：流体と音の相互作用の解析 (オイラー方程式の数理解析：渦運動と音波150年)

AUTHOR(S):

高橋, 公也; 宮本, 真孝; 高見, 利也; 小林, 泰三; 西田, 晃; 青柳, 睦

CITATION:

高橋, 公也...[et al]. エアリード楽器の発音機構：流体と音の相互作用の解析 (オイラー方程式の数理解析：渦運動と音波150年). 数理解析研究所講究録 2010, 1697: 31-45

ISSUE DATE:

2010-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141675>

RIGHT:

エアリード楽器の発音機構: 流体と音の相互作用の解析

九州工業大学大学院 情報工学研究院 高橋公也 (Kin'ya Takahashi)*

九州工業大学大学院 情報システム専攻 宮本真孝 (Masataka Miyamoto)*

九州大学 情報基盤研究開発センター 高見利也 (Toshiya Takami), 小林泰三 (Taizo Kobayashi),
西田晃 (Akira Nishida), 青柳睦 (Mutsumi Aoyagi)**

* Physics Laboratories, Kyushu Institute of Technology

** Research Institute for Information Technology, Kyushu University

1 はじめに

フルート, リコーダー, パイプオルガン (一部のパイプを除く) 等のエッジトーンと呼ばれる流体音を音源とする楽器をエアリード楽器と言う. エアリード楽器の発音機構の解析は, 古くからの音楽音響分野の課題であり, 現在でも完全には理解されていない [1]. エッジトーンは, エッジに衝突する流体のジェットから発生する音で, 楽器では管体の歌口部分で作り出される. 問題を困難にしているのは共鳴管体の存在である. 楽器は管体の共鳴構造を利用して演奏に必要な明確な音程を作り出すが, そのために, 管体内部の音圧は共鳴により 140~160dB と極めて高くなる. 高い音圧は, エッジトーンを作り出すジェットの運動に影響を与え, 共鳴管体の周波数へとその運動を同期させ, 周期的な運動を作り出す. この過程を詳しく理解するためには, 流体と音の相互作用の問題を取り扱う必要があるが, このような問題を取り扱う手法は現在まだ確立されていない.

エッジトーンの研究の歴史は大変に古く, 1937 年の Brown の論文で, すでに, 発音周波数を現象論的に記述する理論式が提案されている [2]. また, 流体音源の研究は, 1952 年の Lighthill の著名な論文 [3], さらにそれ以前にまで遡ることができる. これらの成果に刺激され, 1960~70 年代に, エアリード楽器の発音機構の解明への研究が着手されている. 音楽音響の分野では, Coltman により, エッジトーンそのものと共鳴管体を持つエアリード楽器の違いについて議論され, エアリード楽器の発振特性を現象論的に捉える理論が提案されている [4]. また, 渦音理論の提案者の一人である Howe の著名な論文でもエアリード楽器の発音機構について触れている [5]. その後, 音楽音響の分野では, Coltman や Howe の研究をもとにした現象論的な理論を発展させた [1]. しかし, これらの現象論的理論は実験結果とある程度一致するが, その動力学的な機構についてはほとんど明らかにしていない.

著者らの研究の目標は, 小型エアリード楽器の数値解析を通して, どのように音源となる流体から音波が発生し, その結果管体内に発生した音波はどのように音源となる流体の運動に影響を与えるか等の流れと音の相互作用の問題を解析し, エアリード楽器の発音に関連した動力学的機構を明らかにすることである. この報告では, その第一歩として, 小型エアリード楽器の二次元モデルを用いた数値解析で発振現象がどの程度まで再現されるかについて報告する. 航空機や高速列車から発生する流体音を音源とする騒音の問題では, 流れと音を分離して解く連成解析的な手法が一般

的である [6]. しかし、流れと音の相互作用が重要な楽器の場合は、流れと音を同時に解くことが必要である。そこで、我々は、連成的な手法は用いず、圧縮流体を LES (Large-Eddy Simulation) を用いて音場も含めた状態で流体の運動を数値的に解いた。LES を用いたのは、精度は多少犠牲にするが、長時間の解析に対し安定しているからである [6].

この論文の構成は、以下の通りである。2-4 章で、流体や音楽音響の分野でこれまで行われてきた研究の概説を行う。2 章では Lighthill の理論を、3 章では Brown のエッジトーンの研究を、4 章では音楽音響のエアリード楽器の理論を紹介する。5-6 章で、我々の研究結果について報告する。5 章ではモデルと解析の手法について説明し、6 章では具体的な解析結果について述べる。7 章は結論と議論にあてられる。

2 Lighthill の理論 (音響学的類推)

空力音響学 (流体音響学) の定式化は、Lighthill によってなされた [3]. Lighthill の方程式は以下のように与えられる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) (\rho - \rho_0) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1)$$

ここで、 T_{ij} は、Lighthill のテンソルと呼ばれ、以下のように定義される。

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + ((p - p_0) - c^2(\rho - \rho_0)) \delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (2)$$

ここで、 c は音速、 p_0 と ρ_0 は圧力 p と密度 ρ の平均値、 σ_{ij} は粘性応力テンソルである。

Lighthill の方程式は、それ自身では閉じた方程式ではなく、例えば、Lighthill のテンソルを計算するには、流体力学の基礎方程式 (連続の式 + Navier-Stokes 方程式 + エネルギー方程式) の解を用いる必要がある。しかし、(1) 式を見て分かるように、左辺は音波の伝搬を記述する波動方程式であり、右辺はその音源と見ることができる。したがって、形式的にはあるが、どのような流体の運動が音源となりうるかを示していると考えられる。このような理由で、Lighthill の音響学的類推と呼ばれることが多い。

実際の音源項の計算では、散逸が小さく断熱的な仮定 $(p - p_0) - c^2(\rho - \rho_0) = 0$ が成り立っていると考え、さらに、Reynolds 数が比較的大きいので粘性の効果も無視できると考える。したがって、Lighthill のテンソルの主要項は、(2) 式の右辺の第一項 $\rho v_i v_j$ である。音波による密度の揺動は小さいと仮定し、 $\rho = \rho_0$ 、したがって、 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ とおいて、二次元流体での音源項を計算すると以下ようになる。

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \sim -2\rho_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad (3)$$

6 章で述べる数値解析で求めた音源項は、この式によって計算したものである。

3 エッジトーン

この章では、エアリード楽器の音源となるエッジトーンについて簡単に紹介する。図1に示すように、ノズルから噴出したジェットがエッジに衝突すると渦を発生させ、その影響でジェットの縦方向の変動が励起される。ジェットの変動はかなり規則的で、その振動数はジェットの流速に依存する。ジェットそのものに含まれる渦やエッジで作られた渦は流体音源になり、エッジトーンと呼ばれる特定の周波数をもった音を発生させる。次式は、Brown によって現象論的に与えられたジェットの流速 V と発振周波数 ν の関係を表す式である [2]。

$$\nu = 0.466j(100V - 40)(1/(100l) - 0.07) \quad (4)$$

ここで、 l はノズルとエッジの距離である。パラメーター j は、 $j = 1.0, 2.3, 3.8, 5.4$ で与えられる。 $j = 1$ は、流速 V が小さいときに発生する基音を表し、それ以降の数は、流速が上がるにしたがい発生する倍音に対応する。基音では、ジェットはノズルとエッジの間にほぼ半波長になる定在波を作りだしていると考えてよい。倍音の次数が上がるにしたがい波長が短くなり、ノズルとエッジの間の定在波は、1 波長、3/2 波長... のようになる。(4) 式が示すように、周波数 ν は流速 V に比例して増大する。断熱的に流速を上げていくとまず基音が発振するが、ある閾値を越えると倍音に遷移する。基音と倍音の発振領域がオーバーラップするので、流速を下げたときの倍音から基音への遷移は、上昇時の閾値よりも小さな流速で起きる。ジェットの流速をさらに速くしたときに起きる倍音間の遷移でも同様なことが起きる。したがって、発振状態間の遷移は履歴的になる。

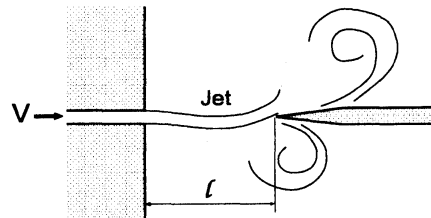


図 1: エッジトーン

4 音楽音響におけるこれまでの研究

音楽音響の分野で、エアリード楽器の発音機構の研究で最初に重要な成果を上げたのは、1960-70 年代における Coltman の研究である [4]。ここでは、Fletcher & Rossing の著書 *The Physics of Musical Instrument* [1] を参照しながら、その後の発展を交え、音楽音響におけるエアリード楽器の発音機構の現象論的な理論を紹介する。議論は、a) 音響的な流量によって駆動されるジェットの変動、b) ジェットがパイプを駆動するメカニズム、c) 等価回路を用いた発振条件の評価、の 3 段階に分かれる。

a) 音響的な流量によって駆動されるジェットの変動

ノズルから出たジェットは極めて不安定で、エッジ等の幾何学的な境界条件や縦方向に振動する流れ場によって変動し、蛇行を始める。蛇行したジェットはある位相速度 u をもつ波となって伝搬する。ジェットの不安定さのために、その振幅は距離とともに指数関数的に増大する。ここでは、簡単のために図2に示すようにエッジの存在を無視し、縦方向に周期的に変動する音響的流量 $v_z \exp(i\omega t)$ が加えられていると仮定する。このとき、ジェットの縦方向変動 $J(x)$ は以下のような式で与えられることが現象論的に知られている。

$$J(x) = -i \frac{v_z}{\omega} \{ \exp(i\omega t) - \cosh(\mu x) \exp(i\omega(t - x/u)) \} \quad (5)$$

ジェットの位相速度 u は、 $kb \rightarrow \infty$ の極限で、 $u \sim V/2$ となる。ここで、 $2b$ はノズルの縦方向の幅を表す。振幅の増大率 μ も、 $kb \rightarrow \infty$ の極限で、 $\mu \sim k$ となる。近似 $u \sim V/2$ および $\mu \sim k$ は比較的広い領域で成り立つので、以下では常にこの近似が成り立つものとする。エッジトーンの項目で述べたように、エッジの存在そのものがジェットの周期的な変動を作り出すが、音楽音響の理論では、エッジの存在によるジェットの変動への効果は無視する。これは、定常的な発振状態では、ジェットの変動がエッジよりも音響的な流量によって支配されることを暗に仮定していることを意味する。

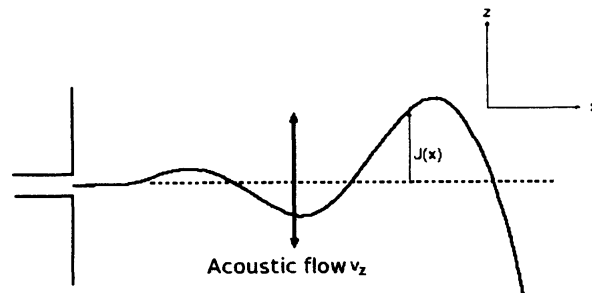


図 2: ジェットの振動

b) ジェットが管体を駆動するメカニズム

前節 a) で求めたジェットの変動から、現象論的な理論を展開する事により、ジェットが管体を駆動するメカニズム、すなわち、管体内にどの様に音圧が励起されるかを議論する事が可能である。図3に示すように、管体内に流入したジェットは、断面 M と断面 P の間で緩和し、断面 P の右側では流体的な運動はなくなり音響的な変動のみが存在すると仮定する。それらの仮定のもとで管体内部の音響的な流量 U_p を求めると以下のような式が得られる。

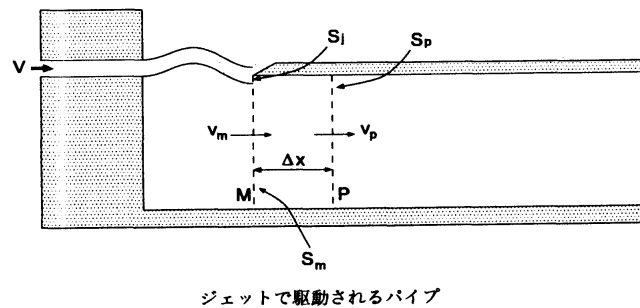
$$U_p = \frac{\rho V^2 S_j}{S_p(Z_p + Z_m)} + \frac{i\rho\omega\Delta L V S_j}{S_p(Z_p + Z_m)} \quad (6)$$

ここで、 $Z_m = i\rho\omega\Delta L/S_p$ は断面 M から外を見たときの音響インピーダンス、 ΔL はマウス部分(歌口)の開口端補正、 Z_p は断面 M から見た管体の音響インピーダンス、 S_p は管体の断面積、 S_j は管体内に流入するジェットの有効断面積である。ここで、音響インピーダンスは、圧力を体積

流量で割った次元を持つ量で、線形の音響デバイスに加えられた圧力変動により発生する体積流量を計算するのに使われる。

(6) 式の右辺の2つの項は管体を駆動する異なるメカニズムを表し、第一項が運動量的駆動を、第二項は流量的駆動を表す。運動量的駆動項は、管体内に流入したジェットの体積流 $S_j V$ が運動量釣り合いの仮定のもとでどのように音圧に変化するかを表したもので、荒っぽく言えば、ジェットが断面 M と断面 P の間で緩和混合する過程で静止し、それと交換に音圧を発生させる機構を表す。一方、流量的駆動項は、ジェットは本質的に流量をもたらすものと仮定したとき、それが共鳴器のエッジ内部に存在する音圧に作用する効果を表したものである。開口端では音圧は小さくなるが、開口端補正のためにゼロではないのでこのような作用が可能である。

2つの項を比較すると、 $\omega \Delta L > V$ ならば流量的駆動 > 運動量的駆動となり、流量的駆動が支配的になることが予想される。例として、6章で我々が行う、数値解析の代表的な値 $\omega \sim 2\pi \times 900 \text{ rad/s}$ (基音の周波数)、 $\Delta L = 0.005 \text{ m}$ を代入すると $\omega \Delta L = 9\pi \sim 28.3 \text{ m/s}$ となり、基音の発振においては、流速 V が 28.3 m/s 以下では流量的駆動が支配的になることが予想される。後でわかるように、我々の計算では基音が発振するのは $V \leq 24 \text{ m/s}$ なので、基音の発振はすべて流量的駆動であると予想される。



ジェットで駆動されるパイプ

図 3: エアリード楽器の駆動のメカニズム

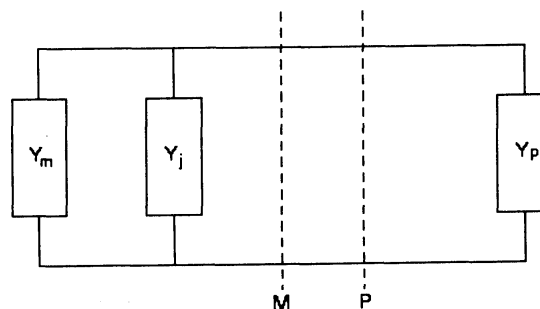


図 4: 等価回路

c) 等価回路を用いた発振条件の評価

項目 a) と b) の結果を用い、駆動源であるジェットと管体の応答を線形近似し、等価回路モデルを用いることで、楽器の発振条件を評価することが可能である。図 4 にその等価回路を示す。ここで、 Y_j はジェットの運動 ((5) 式) から計算されるジェットのアドミッタンス、 Y_m はマウスのアドミッタンスで、マウスのインピーダンス Z_m の逆数で与えられる。これらの 2 つのアドミッタンスの和 $Y_g = Y_m + Y_j$ が、管体を駆動する発振器のアドミッタンスとなる。したがって、管体のアドミッタンス Y_p が与えられると、発振条件は

$$Y_j + Y_m + Y_p = 0 \quad (7)$$

で与えられる。管体内部の音響的な散逸を考慮すると、管体のアドミッタンスは、純虚数ではなく小さな正の実部を持つ。したがって、 Y_m がほぼ純虚数であることを考慮すれば、発振条件 (7) は、以下の様書き直すことが出来る。

$$\text{Re}Y_j < 0 \quad (8)$$

$$\text{Im}(Y_j + Y_m + Y_p) = 0 \quad (9)$$

(8) 式は、パワーソースであるジェットが負性抵抗を持つことを意味している。ジェットのアドミッタンスの具体的な形は次式で与えられる。

$$Y_j \sim \frac{VW}{\rho\omega^2\Delta L} \cosh \mu l \exp \left[-i \left(\frac{\omega l}{u} + \phi \right) \right] \quad (10)$$

ここで、 $\phi = \arctan \left(\frac{V}{\omega\Delta L} \right)$ である。マウスのアドミッタンスは、 $Y_m = 1/Z_m = -i \frac{S_p}{\rho\omega\Delta L}$ で与えられる。管体のアドミッタンスは開管と閉管 (管の他端が開いたものと閉じたもの) で異なり、開管では、 $Y_p = -i \frac{S_p}{\rho c} \cot kL$ 、閉管では、 $Y_p = i \frac{S_p}{\rho c} \tan kL$ となる。したがって、(9) 式で与えられる条件は、閉管では以下のように書き直せる。

$$-\frac{1}{\omega\Delta L} - \frac{V}{\omega^2\Delta Lh} \cosh \mu l \sin \left[\left(\frac{\omega l}{u} + \arctan \left(\frac{V}{\omega\Delta L} \right) \right) \right] + \frac{1}{c} \tan kL = 0 \quad (11)$$

電気回路の力率 (=有効電力/皮相電力) と同様に考えると、最適発振条件は、($\text{Re}Y_j < 0$ and $\text{Im}Y_j = 0$) で与えられる。これは、(10) 式の位相項が $-\pi$ 、すなわち、 $\omega l/u = \pi - \phi$ となることを意味する。管体の最低次共鳴 (基音) の発振が起きているときは、ジェットの流速 V はあまり大きくなく、 $|\phi| \ll 1$ となるので、 $u \sim V/2$ の近似のもとで、 $\lambda/2 \sim l$ 、すなわちジェットの波の半波長がノズルとエッジの距離にほぼ等しくなることが予想される。したがって、 $\pi/l \sim k \sim \mu$ である。一方、 $\text{Im}Y_j = 0$ は、(9) 式より、 $\text{Im}(Y_m + Y_p) = 0$ を意味する。周波数があまり小さくなく $\omega\Delta L/c \ll 1$ が成り立っているとすると、開管では $kL \sim n\pi$ 、閉管では $kL \sim (n + 1/2)\pi$ となる。これらは各管体の共鳴周波数を与える。

図 5 は、(9) 式で与えられる発振条件から予想されるジェットの流速と発振周波数の関係を (4) 式で与えられるエッジトーンのそれと比較したものである。流速を上げるにしたがい、エッジトーンによる発振から管体の共鳴周波数に同期した発振に変化することが予想される。破線で示した最適発振条件 ($\text{Im}Y_j = 0$) を示す直線と (9) 式で与えられる曲線との交点が最も安定に発振している状態であると推測される。楽器がこの様な特性をもつことは実験的にも確かめられている [4]。

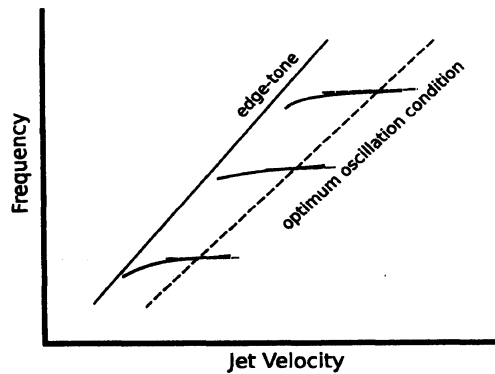


図 5: 音楽音響の理論から予測されるジェットの流速と発振周波数の関係

5 モデルと計算方法

a) 小型エアリード楽器のモデル

エアリード楽器の解析には、流体の運動とそれから発する音波を同時に解析する必要がある。流体の運動ではその流速は高々数十 m/s であるが、音波の位相速度は約 340m/s と一桁大きい。音波の位相速度の速さは、一般の流体のシミュレーションに比べてより小さな時間刻みを要求するであろう。一方で、音波の波長は 1 万 Hz においても 34mm 程度であるのに対し、流体運動で発生する渦のスケールはそれよりも遥かに小さい。したがって、流体の細部の構造を正確に再現するには、音波の解析に使われるメッシュよりもより細かなメッシュが必要である。また、音波の流速は、管体内部のような極めて強い音場においても数 m/s を越えるのはまれで、生活音の領域ではそれよりも 4, 5 桁は小さい。そのため、音波のエネルギーは流体の流れのそれに比べて遥かに小さい。したがって、エネルギーの小さな音波が散逸しながら遠方まで伝搬して行く様子を流体のシミュレーションで再現することは極めて難しいと言える。

そこで、我々は、楽器のサイズをできるだけ小さくし、音波については楽器の近接音場 (ニアフィールド) を扱うように話を限定する。我々が取り扱ったモデルは図 6(a) に示すような二次元の数値モデルである。二次元モデルを扱うのは、メッシュ数を減らし、計算時間を節約するためである。3次元の等価なものを考えると、 z 方向は一様な厚みを持ち摩擦のない壁で仕切られたものを想像すると良い。

楽器の管体の長さは 9mm とかなり短いですが、楽器先端が閉じられた閉管構造をしているので、最低次の共鳴周波数は 913.1Hz となり一般の音楽の演奏で使われる範囲の周波数である。実際、パイプオルガンのパイプにはこの程度の長さのパイプも存在し、ホイッスルでは、管長はこれよりも短いものが一般的である。エッジの角度は 25° に固定した。予備的な数値計算では、この角度のモデルの発振が最も安定していたからである。この程度のエッジ角度を持つエアリード楽器はごく普通に見られる。

b) 数値解析の方法

数値解析では、LES を用いて圧縮流体を解く [6]。LES 法では、他の解析法に比べ比較的粗い

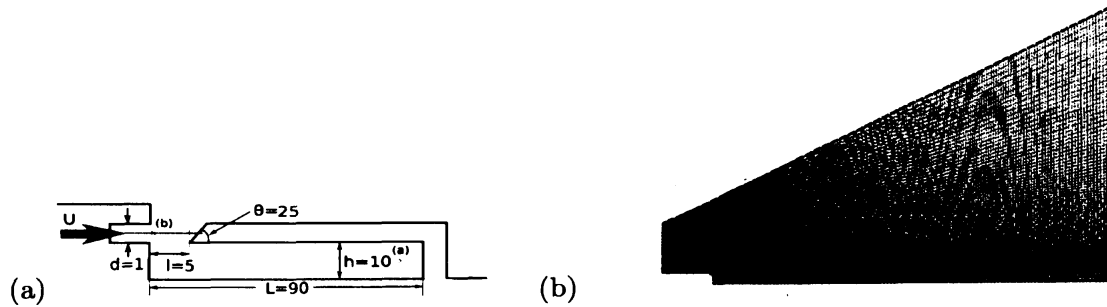


図 6: モデルとメッシュ (a) 小型エアリード楽器のモデル (長さの単位は mm, 角度の単位は度)
(b) 解析に用いたメッシュ(点線部分が透過壁)

表 1: メッシュのパラメーター

points	faces	cells
104,432	51,450	206,565

メッシュを使い、メッシュよりも大きな渦等の流体構造に対しては直接解析し、メッシュよりも小さな渦には SGS(サブグリッドスケール) モデルと呼ばれる統計的な平均化処理を用いて近似する。そのため、他の方法に比べエッジ近傍の流れ等の再現には精度上の問題があるとされるが、一方で、極めて数値的に安定でステップ数が増える長時間の計算には向いている。我々の数値計算では、0.1s の長さの計算を行うが、音波の位相速度の速さを考慮して、時間刻みを $\Delta t = 1.0 \times 10^{-7} \text{s}$ と取るために実質的に長時間シミュレーションである。

解析に用いた数値スキームは、OpenCFD 社が開発した OpenFOAM の圧縮 LES ソルバー coodles である。メッシュは、図 6(b) に示すように長さにして楽器の 5, 6 倍の大きさを持つものを用意した。メッシュの詳しいパラメーターを表 1 に示す。破線で示した左右と天井の壁は透過壁に設定し、それ以外の壁は固定壁である。

観測点は、図 6(a) に示した点 **a**, **b** である。観測点 **a** は、管体内部にあり右側の管壁から 10mm で管体の中心軸上にある。この点では、音圧 (大気圧からの圧力変位) を観測する。実際の演奏音は楽器の外部で聞くが、楽器の内部の方が安定した音圧波形が得られるので観測点を楽器内部に選んだ。観測点 **b** は、ノズルの中心軸上でノズルの出口から 1.6mm にある。この点では、ジェットを作り出す渦度を測定する。渦度を測定するのは、Lighthill の理論 [3] を発展させた Powell-Howe の理論 [5, 7] によれば、渦の運動が流体音の主な音源となるからである。

6 数値解析の結果

a) 定常発振状態

この節では、我々のモデルが最も安定に発振している状態の結果を示す。図 7(a), (b) は、ジェッ

トの流速を $V = 12\text{m/s}$ としたときの、観測点 **a** における音圧の時間変化とそのパワースペクトルである。図 7(a) の波形を見ると、振幅にはゆっくりとした変動が見られある種のうなりの状態にあると考えられるが、音圧の大きさは数百 Pa 程度と比較的大きく、共鳴発振状態にあると考えられる。図 7(b) のパワースペクトルを見ると、明確な基音のピークが 818Hz にある。この値は管体の最低次の共鳴周波数 913.1Hz よりも小さいが、次節で述べるようにジェットの流れを少し上昇させると共鳴周波数に近づいていく。モデル管体は先端が閉じられた閉管なので、奇数次の高調波のピークが観測されるはずであるが、高調波のピークは明確ではなく、そのため正弦波に近い波形が観測される。

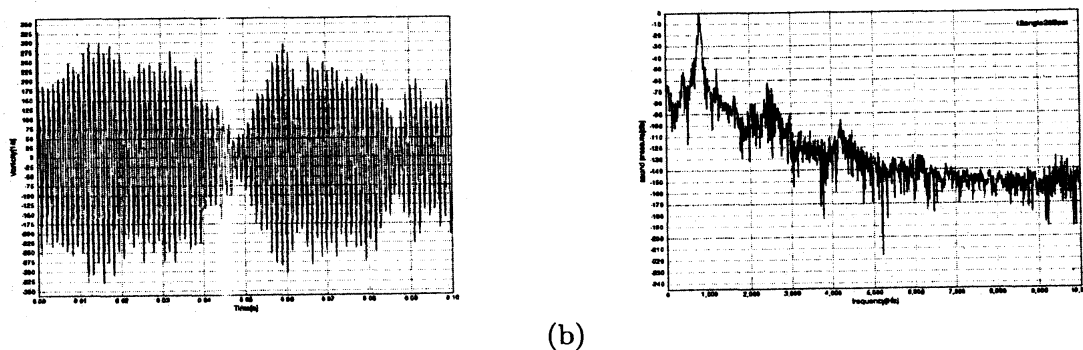


図 7: 観測点 **a** における音圧 (a) 音圧の時間変化 (b) パワースペクトル

図 8(a), (b) に、観測点 **b** の渦度の時間変化とそのパワースペクトルを示す。渦度の時間変化のうなりのパターンは、観測点 **a** における音圧のそれとかなり近い。また、そのパワースペクトルの形状も音圧のパワースペクトルに近く、 818Hz に基音のピークを持つ。図 9 に、観測点 **a** の音圧と観測点 **b** の渦度の相互相関関数を示す。相関関数はほぼ周期的に変動し、その振幅は長時間にわたり減衰しない。したがって、音圧と渦度はともに極めて規則的に振動し、それらの間には強い相関がある。後で示すように、ジェットの渦度は音源と強い相関があるので、この結果は、音源となるジェットと管内の音圧の間に強い相関があり、同期状態にあることを意味する。

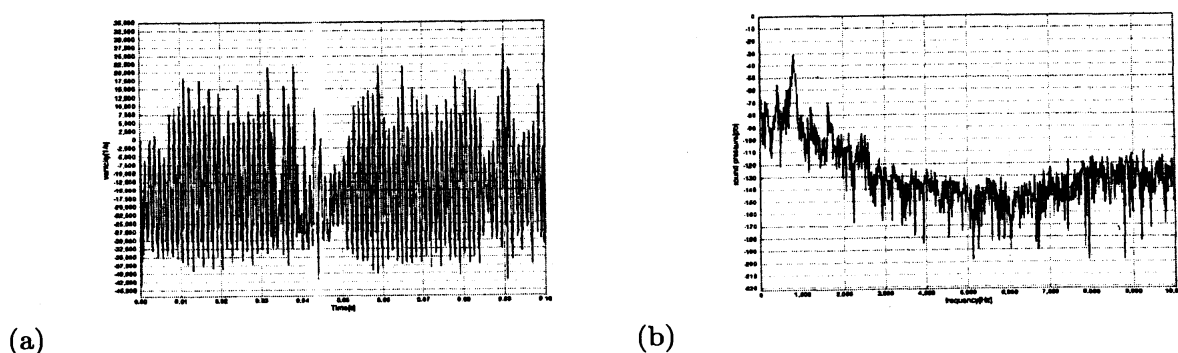


図 8: 観測点 **b** におけるジェットの渦度 (a) 渦度の時間変化 (b) パワースペクトル

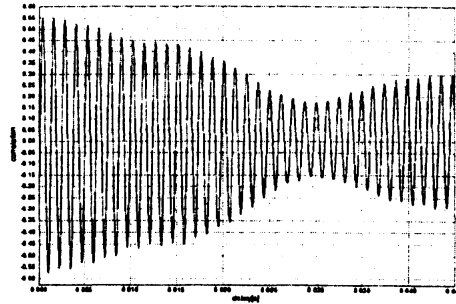


図 9: 音圧とジェットの渦度の相関

定常発振状態における物理量の空間分布を見てみよう。図 10 に、定常発振状態の音圧分布、流速分布、渦度分布、Lighthill の音源分布を示す。Lighthill の音源分布の計算には、(3) 式を用いた。図 10(a) に示すように、定常発振状態では、管体内の音圧は外部に比べて極めて高くなり、周期的に正負の値を取る振動が見られる。これは、管体内部で強い共鳴発振が起きていることを示している。図 10(b) に示す速度分布では、振動するジェットがエッジに衝突することで作られた渦が管体の外部と内部に流れ込んでいく様子が見られる。管体の外部の渦は、管体の外壁に沿って流れより広い領域に拡散していく。これに対し、管体内部の渦は、管体の開口部の近くに局在し熱対流で見られるようなローターを作り、管体の奥深くまで広がることはない。したがって、少なくとも管体の右側 2/3 程度の領域では、流体的な運動はほぼなくなり、音場が支配的になる。開口部の下部にローター構造が作られることは、ジェットとその近傍の流れ場と音場との間の相互作用、特にそれらの間の同期に強い影響を与えていると考えるのは妥当であろう。事実、強い共鳴発振が起きているときには、開口部下部にできる最も大きなローターは時計回りをであるが、反時計回りの回転が見られるときには発振は抑制され不安定になる。例えば、エッジの角度を 45 度にすると、ローターは反時計回りとなり不安定で弱い発振が観測される。

図 10(c) に見られるように、強い渦度分布は、ジェットの上下の境界層と、ジェットがエッジに衝突した後発生するロールアップした渦に見られる。ロールアップした渦が存在しない管体の右半分には明確な渦度分布は見られない。図 10(d) の Lighthill の音源は、渦度分布にほぼ一致している。これは、Powell-Howe の渦音理論の主張「流体音の主な音源は渦度である」と一致する [5, 7]。Lighthill の音源分布を見ると、ジェットに沿った音源はジェットの周期的な変動を反映してかなり規則的な運動をする。これに対し、管体内部に現れる音源分布は、比較的強い開口端近傍においてさえジェットに沿った音源分布に比べると弱く、不規則な運動をする。これらのことより、流速が $V = 12\text{m/s}$ の場合の楽器を駆動している主なメカニズムは、音楽音響の理論の言葉で言えば、ジェットそのものが作り出す流量的駆動であり、管体の内部に流れ込んだジェットが音圧に変わる運動量的駆動の役割は小さいと推測される。これは、4 章 b) 節で予測した、結果と一致する。

b) ジェットの流速と発振周波数

前節で見たように、ジェットの流速が $V = 12\text{m/s}$ の場合には、管体内の音場とジェットの中心軸

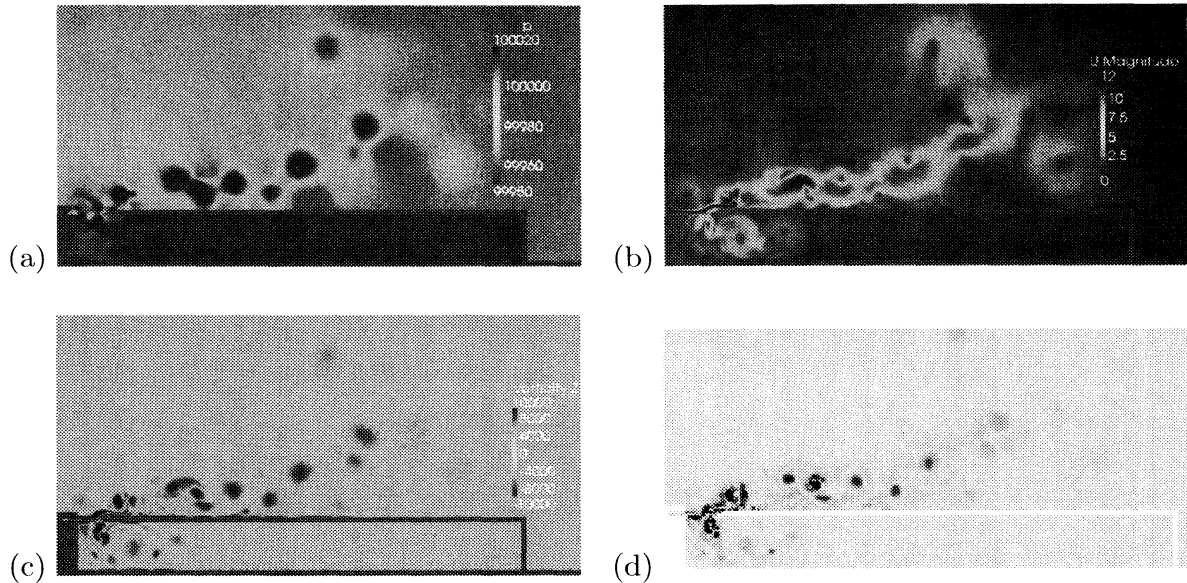


図 10: 発振状態のスナップショット (a) 音圧分布 (b) 流速分布 (c) 渦度分布 (d) Lighthill の音源分布

上の渦度は同期し、ほぼ管体の最低次の共鳴周波数を持つ強い発振が起きた。この節では、ジェットの流れをパラメーターとして変化させたときの発振周波数の変化を調べ、管体の共鳴周波数への同期が流速のどの範囲で起きているかを明らかにする。

図 11 に、ジェットの流速と発振周波数の関係を示す。図 11(a), (b) は、観測点 a の音圧と観測点 b のジェットの渦度それぞれに対し、ジェットの流速 V を x 軸、周波数 ν を y 軸に取り、スペクトル強度を等高線として描いたものである。図 11(c) では、ジェットの流速と発振周波数の関係を見やすくするために、音圧および渦度のスペクトルの共鳴ピークのみを抜き出してその変化を描いている。この図には、比較のために、管体の管長から予測される基音と 3 倍高調波の周波数および Brown の理論から予測されるエッジトーンの周波数 ((4) 式で $j = 1$ とおいたもの) も描いている。

図 (c) に見られるように、音圧と渦度の共鳴ピークは、ジェットの流速の全領域 ($4 \leq V \leq 40 \text{ m/s}$) でほぼ一致している。これは、ジェットの振動周波数と管体内の音場の周波数が、ジェットの流速の全領域でほぼ同期していることを意味する。基音のピークは全領域で現れるが、3 倍高調波の明確なピークは $V \geq 24 \text{ m/s}$ で現れる。基音の共鳴ピークは、 $4 \leq V \leq 8 \text{ m/s}$ の領域では、Brown の理論式 ((4) 式) に沿ってほぼ線形に増加するが、 $V \geq 10 \text{ m/s}$ では、徐々に増加が頭打ちになり、管体の基音の共鳴周波数 (913.1 Hz) に漸近する。特に、 $V \geq 14 \text{ m/s}$ では、基音のピークは管体の共鳴周波数を持つと考えてよい。これに対し、3 倍高調波のピークは管体共鳴から予想される 3 倍高調波の周波数 (2739.3 Hz) より数百 Hz 小さく、流速 V の上昇とともにその周波数は増加するが、十分に漸近しているとは言えない。以下、流速 V の変化に伴う発振の詳細を見てみよう。

エッジトーンが発生する $4 \leq V \leq 8 \text{ m/s}$ の領域では、音圧は流速 V の増加とともに増加するが、その大きさは管体共鳴の起きているときの音圧 (数百 Pa) に比べて小さく、高々数 ~ 数十 Pa 程度である。図 (a) の音圧の周波数分布を見ると、Brown のエッジトーンの理論式 (4) に沿って高い

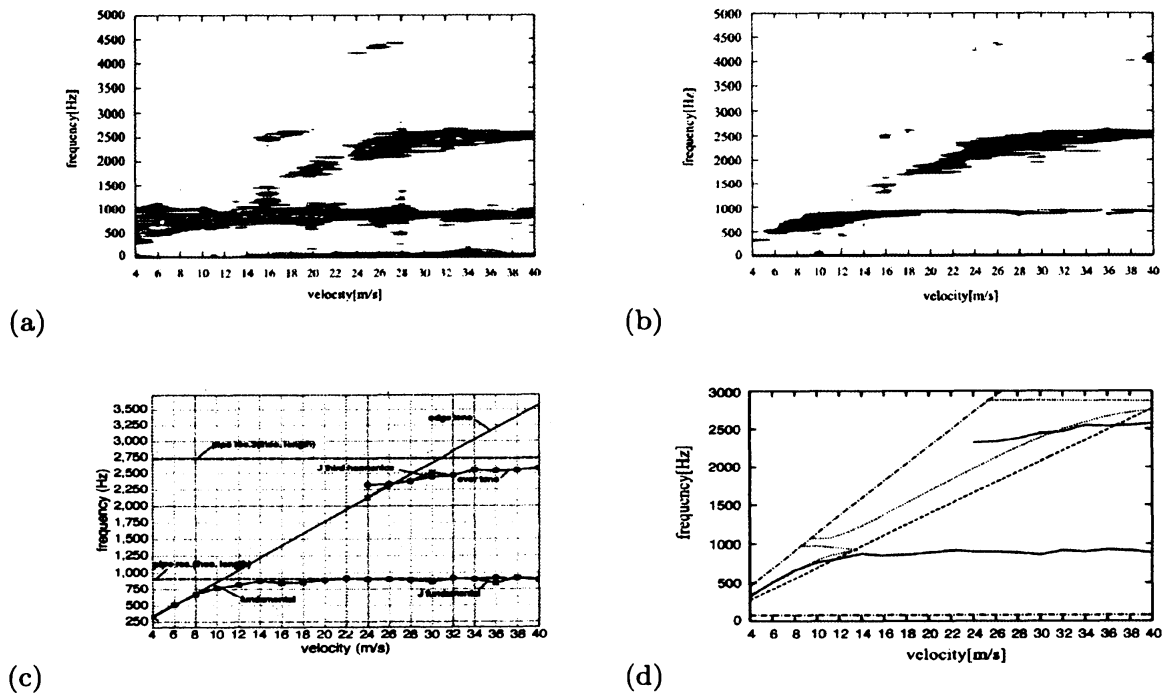


図 11: ジェットの流速と発振周波数の関係 (a) 観測点 a の音圧のスペクトルの等高線図 (b) 観測点 b のジェットの渦度のスペクトルの等高線図 (c) ジェットの流速 V と発振周波数の関係 (d) 音楽音響の理論予測との比較

分布が見られるが、それより高い領域にも分布が広がっている。これは、エッジトーンの高調波の成分や管体の共鳴周波数に対応する強度分布である。これに対し、図 (b) のジェットの渦度の周波数分布はほぼ Brown の式 (4) に沿った分布になっている。したがって、この領域では基本的にジェットの自励振動が支配的で、その周波数に対応したエッジトーンが発生すると考えてよい。しかし、図 (a) で見られるように、管体内部では管体共鳴の影響でその共鳴に近い周波数成分が強調されることがある。そのような場合でもジェットの振動数と管体共鳴の振動数が離れているためにそれらの間の同期が成長することはない。

管体共鳴の基音の発振が見られるのは、 $10 \leq V \leq 22 \text{ m/s}$ の領域である。特に、 $10 \leq V \leq 14 \text{ m/s}$ では安定した発振が見られ、前節でも述べたように $V = 12 \text{ m/s}$ では最も安定した発振が起きる。したがって、最も安定な発振が起きるジェットの流速は、ジェットと管体共鳴の間の同期が始まった直後であると考えられる。事実、図 (a), (b) を見ると $10 \leq V \leq 14 \text{ m/s}$ の領域では、基音の周波数の所にのみ強い強度分布が見られる。これに対し、 $16 \leq V \leq 22 \text{ m/s}$ では、基音の周波数以外にも、3 倍高調波の周波数に対応する分布や、エッジトーンの周波数に対応する分布も見られる。特に、エッジトーンに対応する分布はほぼこの領域全体で見られる。図 (b) の渦の周波数分布では、基音の分布強度は流速 V の増加とともに小さくなるが、逆にエッジトーンの分布は強度の増加が見られる。図 (a) の音圧の周波数分布では基音の分布強度の顕著な変化は見られないが、個々の音圧の時間変化を見ると、振幅の変調がしばしば起こり、それに伴い波形の形状もしばし

ば不規則になり、その強度も $V = 12\text{m/s}$ に比べて小さい。したがって、この領域では、基本的には管体共鳴への同期は起きているが、ジェット本来の自励振動が完全に抑制されているわけではない。その影響で管体共鳴への同期がしばしば攪乱され、結果としてエッジトーンの周波数成分を含む発振が起きると考えられる。

3倍高調波の周波数成分が顕著に観測される $24 \leq V \leq 40\text{m/s}$ の領域を考察しよう。この領域では、基音と3倍高調波の両方の周波数成分が現れるが、流速 V の増加とともに基音の成分は減少し、3倍高調波の成分は増加する。この様子は、図 (a), (b) の音圧とジェットの渦度の周波数分布からも見て取れる。ジェットの渦度では $V \geq 26\text{m/s}$ で、音圧では $V \geq 28\text{m/s}$ で3倍高調波のピークの強度が基音のそれを上回る。それに伴い、発振波形も3倍高調波のそれに近いものが観測される。しかし、それらの波形ではしばしば振幅変調が観測され完全に安定した3倍高調波の発振とはまだ言えない。観測された3倍高調波の周波数が、管体共鳴のそれにまだ十分に漸近していないことを考え合わせると、3倍高調波の安定した発振は、 $V \geq 40\text{m/s}$ で起きると予想される。

最後に、4章で述べた音楽音響の理論による予測との比較を行う。図 11(d) に、(11) 式で予想される閉管楽器のジェットの流速と発振周波数の関係を示す。計算に用いたパラメーターは、 $l = 5\text{mm}$, $\Delta L = 9\text{mm}$, $h = 10\text{mm}$, $L = 90\text{mm}$, $c = 340\text{m/s}$, $\mu l = \pi$ である。また、(11) 式の \sin の引数に現れる $\omega l/u$ を、我々の計算結果に合わせるために $u/l = 0.8V/l$ とスケーリングしている。(11) 式から得られる発振曲線は点線で描かれてる。2本の一点鎖線は $\text{Re}Y_j = 0$ で与えられ、負性抵抗を持つ限界を表す。楽器は負性抵抗を持つ領域で発振するので、2本の一点鎖線で囲まれた領域で発振可能である。発振曲線はこの領域でのみ描かれている。破線は、 $\text{Im}Y_j = 0$ で与えられる最適発振条件を与える直線である。図には比較のために、図 (c) で示した音圧の発振周波数(実線)も描いている。我々の計算結果は、(11) 式での予測式とよく一致していると言える。実際、ジェットの流速の小さい領域でのエッジトーンによる立ち上がり、中間領域における管体の基音への同期、より速い流速における3倍高調波の発生など全般にわたり理論式と数値計算の一致が見られる。特に、(11) 式で与えられる発振曲線と $\text{Im}Y_j = 0$ の交点が最適発振状態を与えると考えられるが、この交点は管体基音への同期が起きた直後に現れ、数値計算から得られた最適発振状態 ($V = 12\text{m/s}$) と良い一致を示す。

我々は、(11) 式や最適発振条件 $\text{Im}Y_j = 0$ を求めるために $u/l = 0.8V/l$ というパラメーターフィッティングを行った。この点について最後に考察しておこう。本来、ジェットの波の位相速度 u は、 $u \sim V/2$ (or $u \leq V/2$) 程度であることを考えるとこのパラメーター設定には疑問が残る。しかし、理論的な整合性を考え $u \sim V/2$ とすると、発振曲線は全体的に右側に倒れ込むようにずれる。その結果、ジェットの流速が低い領域では発振曲線の傾きが小さくなり、Brown の式から大きく外れる。さらに、周波数同期が始まる流速が $V \sim 20\text{m/s}$ となり計算結果とは大きな食い違いを示す。音楽音響の理論が、その出発点となるジェットの振動運動の取り扱いでエッジの存在を無視したかなり荒っぽい現象論であること、我々の数値計算の結果がエッジトーンの領域で Brown の理論式に極めて良い一致をすること等を考慮すると、我々の数値計算の方が正しい発振特性を捉えていると考えてよいであろう。むしろ、現象論的な取り扱いで構成された音楽音響の理論が定性的にせよ流体と音波の複雑な相互作用によって発振する楽器の特性を捉えているのは驚くべきことである。

7 結論

この論文では、圧縮性 LES を用いた小型エアリード楽器の二次元モデルの数値解析について報告した。LES を用いた我々の数値計算は、エアリード楽器の発振状態を十分に再現できたと言える。特に、数値的に得られたエアリード楽器の発振特性が、音楽音響の理論的予測や実験結果と良い一致を示したことは注目に値する。再現された発振特性は以下のようなものである。

音源となるジェットの流れが十分に小さいときは、エッジトーンによる発振が支配的で、発振周波数はジェットの流速にほぼ比例する。しかし、エッジトーンの周波数が管体の基音の共鳴周波数に近くなると発振は管体共鳴に引き込まれ、その後ジェットの流速の広い範囲で基音の発振が起きる。さらに流速を上げ、ジェット本来の固有周波数であるエッジトーンの周波数が管体の高調波のそれに近づくと、基音への同期がはずれ、それに代わり高調波への同期が起き、基音から高調波へと発振が変化する。

このように楽器の発振特性が数値的に再現されたので、それをもとに楽器の発音機構の解析へと研究を進めることが可能になった。我々の次の目標は、明確な音源の特定と、流れから音波が発生する機構の解析である。4章で述べたように、音楽音響の理論では、流量的駆動と運動量的駆動の2つの音波の発生機構が存在すると考え、ジェットの流速が上昇するにしたがい、流量的駆動から運動量的駆動へと変化するとされている。この点を流体音響学の立場から明らかにして行きたい。さらに、管体共鳴がジェットの運動に対しどのような影響を与えるかを明らかにし、楽器の重要な特徴である同期現象が起きるメカニズムを追求することは、楽器の発音機構の本質的な理解のために必要である。

この研究では、二次元モデルを取り扱ったが、より現実的な発振現象を解析するためには、三次元モデルの解析も必要となる。我々は、既に、オカリナの三次元モデルの解析に着手し、音響的な発振が起きることを確認している [8]。オカリナは、同じエアリード楽器ではあるが、管体構造の違いのために、管体共鳴ではなくヘルムホルツ共鳴による発振が起きると言われている。この論文で取り扱ったモデルを三次元化し、二次元と三次元の違いを明らかにし、さらに、オカリナのモデルと比較することで、管体構造の違いが発音機構にどのような影響を与えるかという問題を考察することも興味深い研究課題である。

謝辞

この研究は、科学研究費補助金挑戦的萌芽研究 (No.20654035) の支援を受けている。

参考文献

- [1] N.H.Fletcher and T.D.Rossing, '*The Physics of Musical Instruments*', 2nd Edition (Springer-Verlag, New York 1998).
- [2] G.B. Brown, 'The vortex motion causing edge tones', Proc. Phys. Soc., London **XLIX** (1937) 493-507.

- [3] M.J. Lighthill, 'On sound generated aerodynamically. Part I: General theory', *Proc. Roy. Soc. London* **A211** (1952) 564-587.
- [4] J.W. Coltman, 'Sounding mechanism of the flute and organ pipe', *J. Acoust. Soc. Am.* **44** (1968) 983-992; 'Acoustics of the flute', *Physics Today* **21** (1968) 25-32; 'Jet driven mechanisms in edge tones and organ pipes', *J. Acoust. Soc. Am.* **60** (1976) 725-733; 'Momentum transfer in jet excitation of flute-like instruments', *J. Acoust. Soc. Am.* **69** (1981) 1164-1168.
- [5] M.S. Howe, 'Contributions to the theory of aerodynamic sound with application to excess jet noise and the theory of the flute', *J. Fluid Mech.* **71** (1975) 625-673.
- [6] C. Wagner, T. Hüttl, and P. Sagaut, eds. 'Large-Eddy Simulation for Acoustics', (Cambridge, 2007).
- [7] A. Powell, 'Theory of vortex sound', *J. Acoust. Soc. Am.* **33** (1964) 177-195.
- [8] T. Kobayashi, T. Takami, M. Miyamoto, K. Takahashi, A. Nishida, M. Aoyagi, '3D Calculation with Compressible LES for Sound Vibration of Ocarina', *Open Source CFD International Conference 2009*, November 12-13th, Barcelona, Spain, to be published.